Trasformazioni geometriche del piano cartesiano

Se applichiamo a ciascun punto di una curva γ di equazione $F(x; y)=0$ una stessa trasformazione geometrica t, la curva γ viene trasformata in una nuova curva γ'.

Tale curva avrà un'equazione $G(x; y)=0$ che, in generale, sarà diversa da quella di γ.

***Teorema** per ricavare l'equazione di γ' partendo da quella di γ* (s.d.):

Sia γ una curva di equazione $F(x; y)=0$ e sia t una trasformazione espressa mediante il seguente sistema

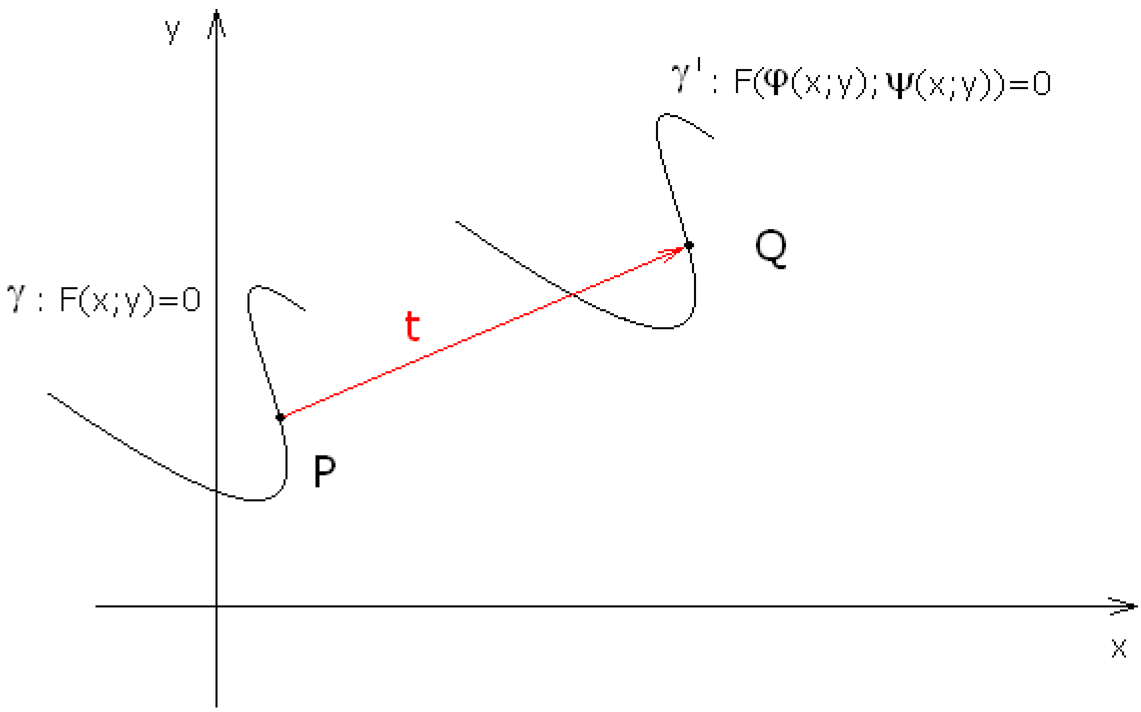
$$t : \begin{cases} x' = f(x;y) \\ y' = g(x;y) \end{cases}$$

e sia

$$t^{-1} : \begin{cases} x' = \varphi(x;y) \\ y' = \psi(x;y) \end{cases}$$

la sua inversa.

Allora l'equazione della curva $\gamma' = t(\gamma)$ si ottiene dall'equazione $F(x; y)=0$ di γ sostituendo al posto di x e di y rispettivamente le espressioni $\varphi(x;y)$ e $\psi(x; y)$ dell'ascissa e dell'ordinata del trasformato di un generico punto (x; y) rispetto a t^{-1}.



Definizione - La sostituzione $\begin{bmatrix} x \to \varphi(x;y) \\ y \to \psi(x;y) \end{bmatrix}$ è detta ***sostituzione associata*** alla trasformazione t definita dal sistema $t: \begin{cases} x' = f(x;y) \\ y' = g(x;y) \end{cases}$ e permette di ottenere l'equazione della curva γ' a partire da quella della curva γ.

Esempi

1. Traslazione della circonferenza $x^2 + y^2 + 4x = 0$ secondo il vettore $v = 2\, u_x - 3\, u_y$.

Il sistema di trasformazione è questo $t: \begin{cases} x' = f(x;y) = x + 2 \\ y' = g(x;y) = y - 3 \end{cases}$

Si ricava la trasformazione inversa $t^{-1}: \begin{cases} x' = \varphi(x;y) = x - 2 \\ y' = \psi(x;y) = y + 3 \end{cases}$ e quindi la sostituzione associata $\begin{bmatrix} x \to x - 2 \\ y \to y + 3 \end{bmatrix}$, da cui si ottiene:

$\mathbf{x^2 + y^2 + 4x = 0} \underset{\left[\substack{x \to x-2 \\ y \to y+3}\right]}{\overset{t}{\to}} (x-2)^2 + (y+3)^2 + 4(x-2) = 0$

$\to \mathbf{x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0}$

2. Simmetria centrale della parabola $y = x^2 - 6x$ rispetto al punto C(4; 0).

Il sistema di trasformazione è questo $\sigma_c: \begin{cases} x' = 2x_c - x = 8 - x \\ y' = 2y_c - y = -y \end{cases}$

Si ricava la trasformazione inversa $\sigma_c^{-1}: \begin{cases} x' = 2x_c - x = 8 - x \\ y' = 2y_c - y = -y \end{cases}$ e quindi la sostituzione associata $\begin{bmatrix} x \to 8 - x \\ y \to -y \end{bmatrix}$, da cui si ottiene:

$\mathbf{y = x^2 - 6x} \underset{\left[\substack{x \to 8-x \\ y \to -y}\right]}{\overset{\sigma_c}{\to}} (-y) = (8-x)^2 - 6\,(8-x) \to y = \mathbf{-x^2 + 10x - 16}$

3. Simmetria assiale della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ rispetto all'asse $2x - y - 6 = 0$.

Occorre lavorare un po' per trovare il sistema di trasformazione $\sigma_a : \begin{cases} x' = f(x;y) \\ y' = g(x;y) \end{cases}$

Consideriamo il generico punto del piano P(x; y) ed il suo simmetrico rispetto all'asse P'(x'; y'). Allora il coefficiente angolare della retta PP' è $m_{PP'} = \dfrac{y'-y}{x'-x}$.

Sappiamo che $m_{PP'} = -\dfrac{1}{m_a} = -\dfrac{1}{2}$ (nel nostro caso). Allora $\dfrac{y'-y}{x'-x} = -\dfrac{1}{2}$

Consideriamo il punto medio del segmento PP': $M\left(\dfrac{x+x'}{2}; \dfrac{y+y'}{2}\right)$. Tale punto appartiene all'asse di simmetria e quindi $2 \cdot \dfrac{x+x'}{2} - \dfrac{y+y'}{2} - 6 = 0$.

Per trovare il sistema della trasformazione risolviamo, rispetto a x' e a y', il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y'-y}{x'-x} = -\dfrac{1}{2} \\ 2 \cdot \dfrac{x+x'}{2} - \dfrac{y+y'}{2} - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (y'-y) = -(x'-x) \\ 2 \cdot (x+x') - (y+y') - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x'-y' = -2x+y+12 \\ x'+2y' = x+2y \end{cases}$ Applicando il m. di Cramer: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2x+y+12 & -1 \\ x+2y & 2 \end{vmatrix} = -3x + 4y + 24$ e $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -2x+y+12 \\ 1 & x+2y \end{vmatrix} = 4x + 3y - 12$

Si ricava $\sigma_a \equiv \sigma_a^{-1} : \begin{cases} x' = \dfrac{-3x+4y+24}{5} \\ y' = \dfrac{4x+3y+12}{5} \end{cases}$ (la s. assiale è involutoria).

La sostituzione associata è pertanto $\begin{bmatrix} x \to \dfrac{-3x+4y+24}{5} \\ y \to \dfrac{4x+3y+12}{5} \end{bmatrix}$, da cui si ottiene:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 4} \xrightarrow[\left[\begin{smallmatrix} x \to \frac{-3x+4y+24}{5} \\ y \to \frac{4x+3y+12}{5} \end{smallmatrix}\right]]{\sigma_a} \left(\frac{-3x+4y+24}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x+3y+12}{5}\right)^2 = 4 \rightarrow$$

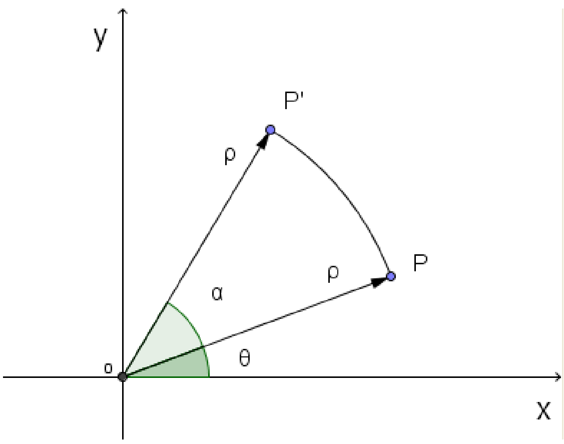
$$\rightarrow \; x^2 + y^2 - \frac{240}{25}x + \frac{120}{25}y + \frac{620}{25} = 0 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 9{,}6x + 4{,}8y + 24{,}8 = 0$$

ASSI particolari

simmetria	asse	eq. asse	simmetria	sostituzione	$F'(x;y)=0$
σ_x	asse x	$y=0$	$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to x \\ y \to -y \end{bmatrix}$	$F(x;-y)=0$
σ_y	asse y	$x=0$	$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to y \end{bmatrix}$	$F(-x;y)=0$
$\sigma_{y=k}$	// asse x	$y=k$	$\begin{cases} x'=x \\ y'=2k-y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to x \\ y \to 2k-y \end{bmatrix}$	$F(x;2k-y)=0$
$\sigma_{x=h}$	// asse y	$x=h$	$\begin{cases} x'=2h-x \\ y'=y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to 2h-x \\ y \to y \end{bmatrix}$	$F(2h-x;y)=0$
$\sigma_{y=x}$	bisettrice 1°-3° q.	$y=x$	$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to y \\ y \to x \end{bmatrix}$	$F(y;x)=0$
$\sigma_{y=-x}$	bisettrice 2°-4° q.	$y=-x$	$\begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} x \to -y \\ y \to -x \end{bmatrix}$	$F(-y;-x)=0$

4. Rotazione di un punto $P(\rho\cos\theta;\ \rho\operatorname{sen}\theta)$ di un angolo a rispetto all'origine O(0; 0).

$$r_{O,\alpha}:\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha \\ y'=x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$



Invertendo (rotazione con stesso centro e angolo $-\alpha$) abbiamo:

$$r^{-1}_{O,\alpha}\equiv r_{O,-\alpha}:\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha \\ y'=-x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

da cui la sostituzione:

$$\begin{bmatrix} x \to x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha \\ y \to -x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha \end{bmatrix}$$

5. Omotetìa con centro l'origine O(0; 0).

Ad esempio omotetìa di un fattore k = 2 dell'ellisse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Il sistema di trasformazione è questo $\omega_{O,2}:\begin{cases}x'=2x\\y'=2y\end{cases}$

Si ricava la trasformazione inversa $\omega_{O,2}{}^{-1}:\begin{cases}x'=\frac{x}{2}\\y'=\frac{y}{2}\end{cases}$ e quindi la sostituzione

associata $\begin{bmatrix}x\to\frac{x}{2}\\y\to\frac{y}{2}\end{bmatrix}$, da cui si ottiene:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \underset{\begin{bmatrix}x\to\frac{x}{2}\\y\to\frac{y}{2}\end{bmatrix}}{\overset{\omega_{O,2}}{\to}} \quad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{9}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$$

6. Dilatazione (caso particolare di **affinità**) con centro l'origine O(0; 0).

Ad esempio dilatazione di un fattore 2 secondo x e 5 secondo y dell'ellisse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Il sistema di trasformazione è questo $\delta:\begin{cases}x'=2x\\y'=5y\end{cases}$

Si ricava la trasformazione inversa $\delta^{-1}:\begin{cases}x'=\frac{x}{2}\\y'=\frac{y}{5}\end{cases}$ e quindi la sostituzione associata

$\begin{bmatrix}x\to\frac{x}{2}\\y\to\frac{y}{5}\end{bmatrix}$, da cui si ottiene:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \quad \underset{\begin{bmatrix}x\to\frac{x}{2}\\y\to\frac{y}{5}\end{bmatrix}}{\overset{\delta}{\to}} \quad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{4}+\left(\frac{y}{5}\right)^2=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

7. **Affinità** o **trasformazioni lineari**

Si chiama affinità ogni trasformazione di equazioni $t:\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$

con $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Per trovare la sostituzione occorre risolvere il sistema:

$$t^{-1}:\begin{cases} a_1x + b_1y = x' - c_1 \\ a_2x + b_2y = y' - c_2 \end{cases}$$

OSS 1: la condizione $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ occorre perché il sistema della t^{-1} ammetta soluzione (determinante $\neq 0$).

OSS 2: se la figura originaria ha area S allora la figura trasformata con l’affinità ha area S’tale che $\frac{S'}{S} = |a_1b_2 - a_2b_1|$.